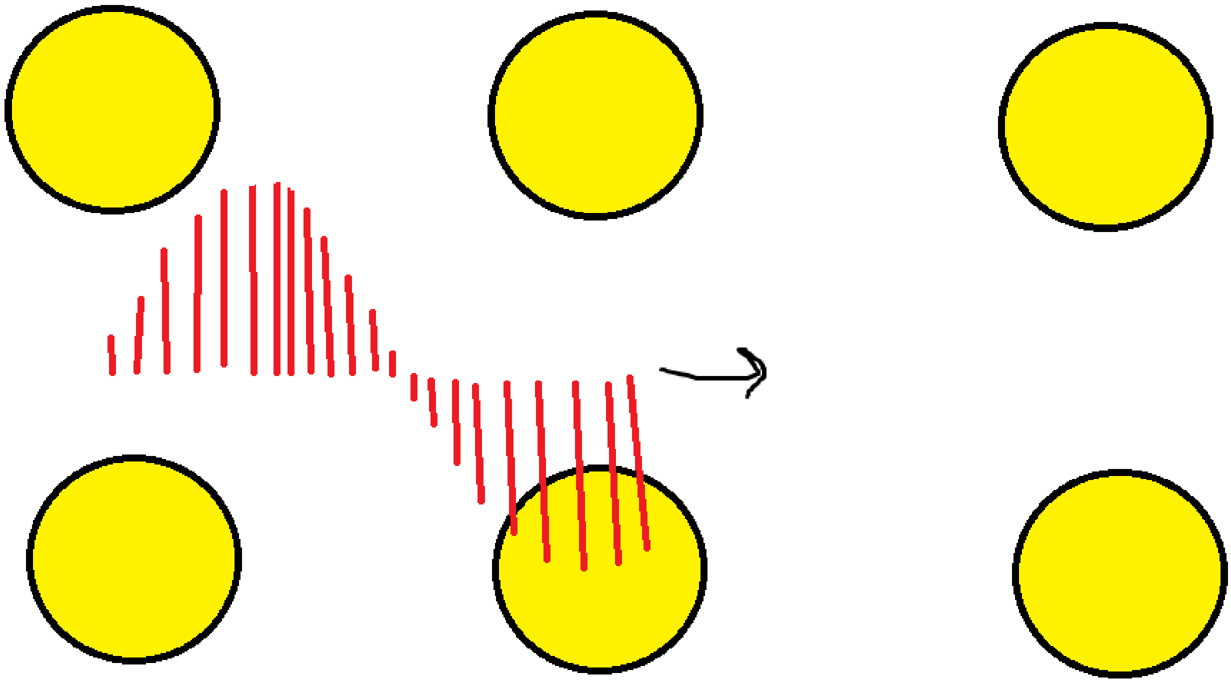
1.18. Дисперсия диэлектрической проницаемости для разреженных газов из нейтральных атомов или молекул

Сейчас мы будем выводить формулу, усаживайтесь поудобнее (вроде бы её выводил ещё Русаков в курсе оптики, но это неточно).

Идёт синусоидальная волна **D**(**r**,t) через среду:

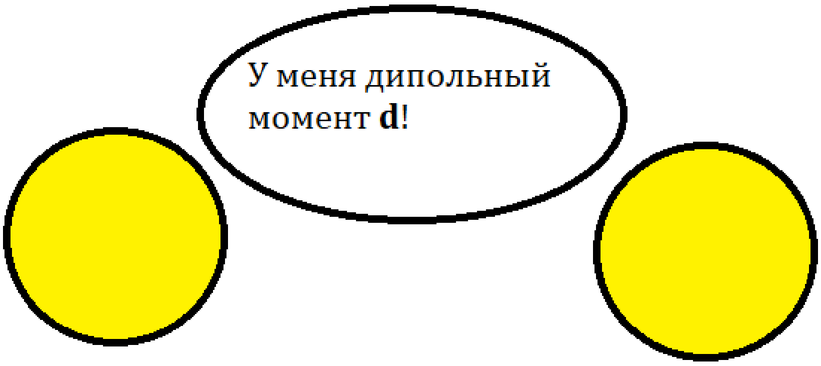


Но атомы среды не остались равнодушными к волне и стали поляризоваться, добавив свою поляризацию 4π**P**(**r**,t).

Итоговое поле **E**(**r**,t) будет суммой внешнего и добавленного от источников:
D(**r**,t)= **E**(**r**,t) + 4π**P**(**r**,t).
Наша задача – найти 4π**P**(**r**,t), т.е. как сильно реагируют атомы на поле. Если мы найдём 4π**P**, то тут же найдём ε:

$$\varepsilon = \frac{D}{E} = \frac{E + 4\pi P}{E} = 1 + 4\pi\frac{P}{E}$$

Итак, ищем 4π**P**!
Воспользуемся тем, что **P**=n**d** – поляризация есть произведение дипольного момента от одного атома на их концентрацию.



В свою очередь, **d**(t)=e***r**$_{ц.з.}$(t), где **r**$_{ц.з}$ – радиус-вектор центра заряда атома, который колеблется туда-сюда. Нам нужно получить его зависимость от времени.

Т.к. мы предполагаем, что он колеблется туда-сюда, то логично считать его осциллятором, поэтому воспользуемся осцилляторным приближением:

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{F} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}, \vec{H}]$$

Где первое слагаемое – m**a** (как завещал Ньютон во втором законе), а второе и третье – костыли. γ и ω_0 – некие характеристики среды.

В правой части сразу отбросим слагаемое с магнитным полем. Почему? Потому что для э/м волны в вакууме E одного порядка с H, а у нас во втором слагаемом c в знаменателе! Значит, $e\vec{F} \gg \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}, \vec{H}]$, и мы можем ограничиться лишь электрической силой, отбросив магнитную:

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{F}$$

Подставим F и поделим на массу:

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Получили ДУ вынужденных колебаний. Его решение давно известно:

$$\vec{r}(t) = \frac{\frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{\left[\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right]} = \frac{\frac{e}{m}\vec{E}}{\left[\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right]}.$$

Вспоминаем про то, что нам нужно найти:

$$\varepsilon = \frac{D}{E} = \frac{E + 4\pi P}{E} = 1 + 4\pi\frac{P}{E} = 1 + 4\pi n\frac{d}{E} = 1 + 4\pi n e\frac{r}{E}$$

$\frac{r}{E}$ оказалось $\dfrac{\vec{r}(t)}{\vec{E}} = \dfrac{\frac{e}{m}}{\left[\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right]}$, подставляем, получаем ответ:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\frac{4\pi N e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Результат часто записывают, вводя $\omega_p^2 = \dfrac{4\pi N e^2}{m}$ - т.н. плазменную частоту Ленгмюра.

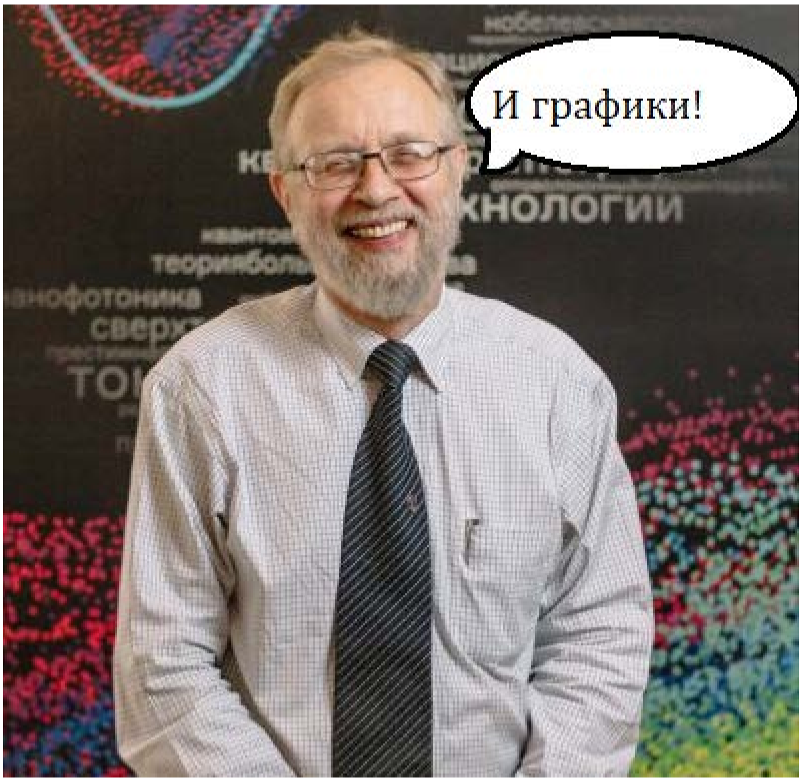
Тогда

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

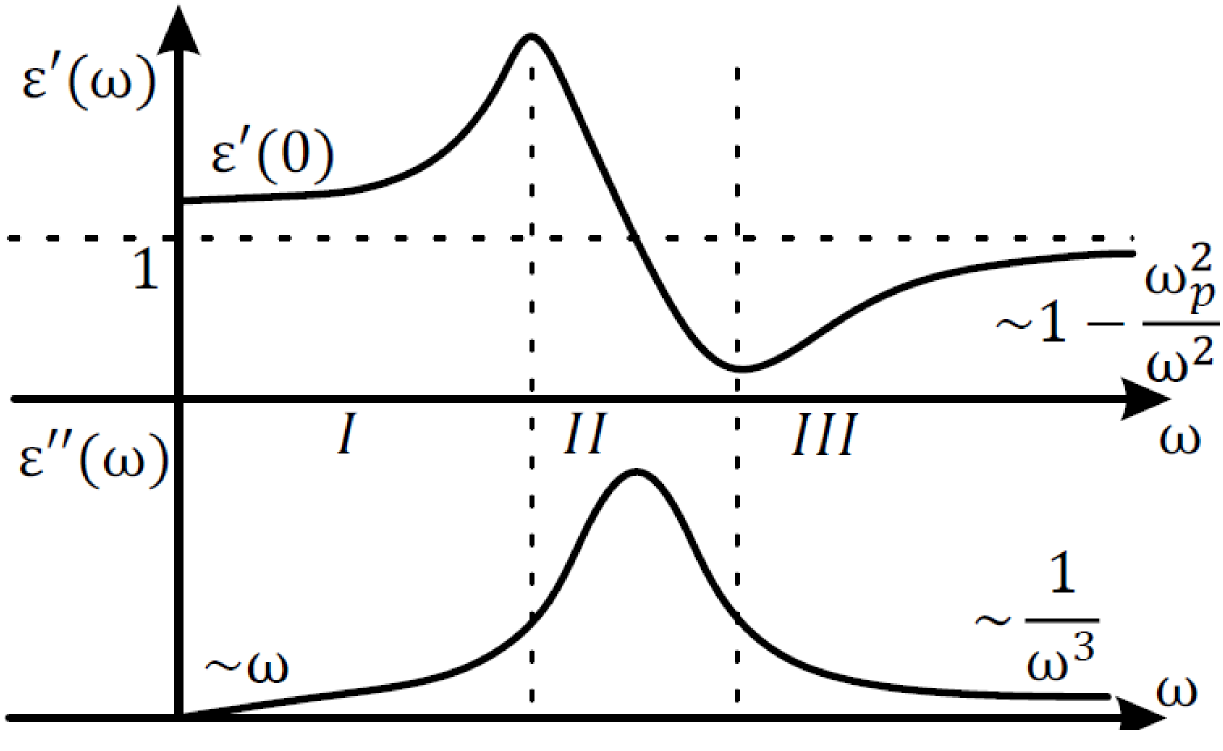
Обратим внимание, что ε получилась комплексной. Выделим отдельно действительную и мнимую степень:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega),$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$



(пояснение мема – Сергей Петрович на семинарах по радиофизике всегда заставлял рисовать много графиков, поэтому я просто не мог не сделать отсылку)



Хм, а почему выделили три области - I, II, III? А выделили их по знаку производной верхнего графика - $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega}$.

а) I, III - области прозрачного вещества. (ε'' - мало). Это области нормальной дисперсии $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} > 0$.

б) II - области прозрачного вещества. (ε'' - велико). Это области аномальной дисперсии $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} < 0$.

Не забудьте сказать про области нормальной и аномальной дисперсии, это тоже от вас требуется.

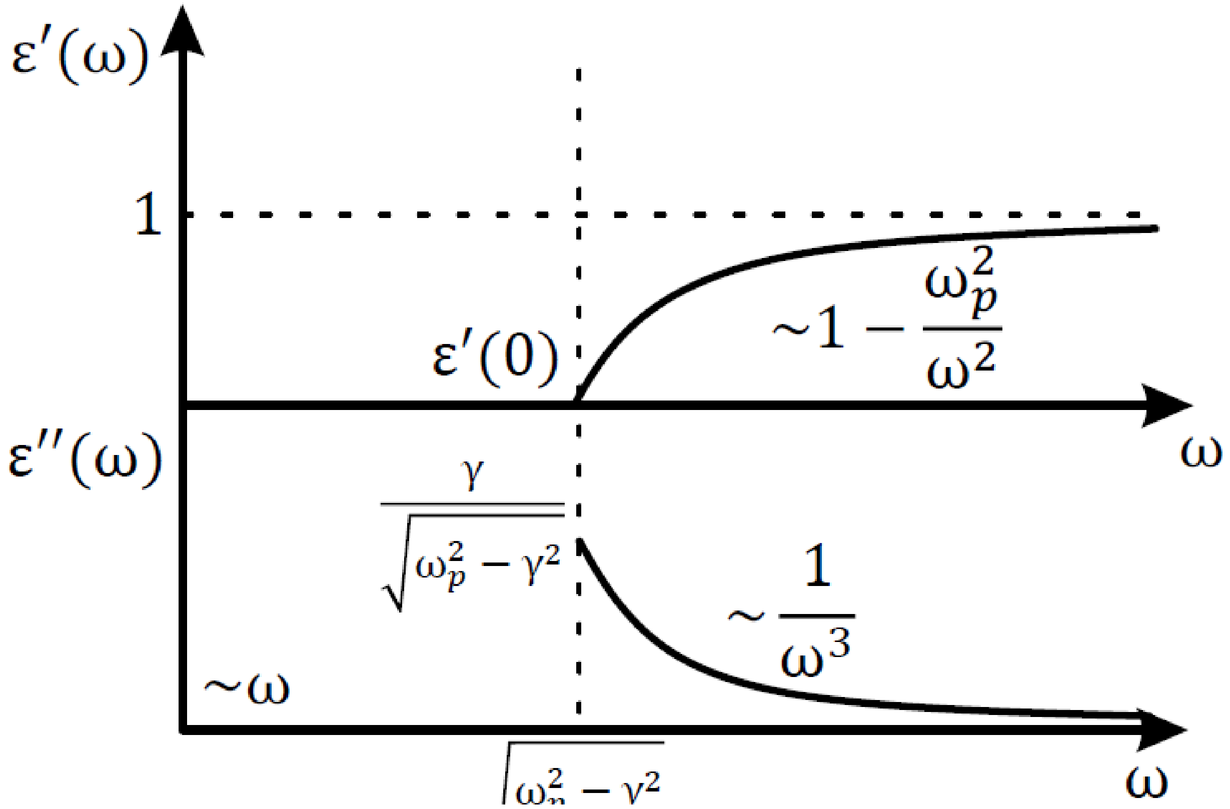
1.19. Дисперсия диэлектрической проницаемости для ионизированных газов

Полностью ионизированный газ (плазма) – это частный случай просто разреженного газа.

В просто разреженном газе ω_0 означала собственные колебания заряда в атоме. В плазме такого нет и там ω_0=0. В результате все формулы упрощаются:

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} = e\vec{F} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}, \vec{H}],$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}.$$



Отметим, что графики не отрисованы при $\omega < \sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2}$. Дело в том, что тогда $\varepsilon'(\omega) < 0$, и распространение э/м волн в такой среде невозможно. При $\varepsilon'(\omega) = 0$. ($\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2}$) возможно распространение лишь продольных волн:

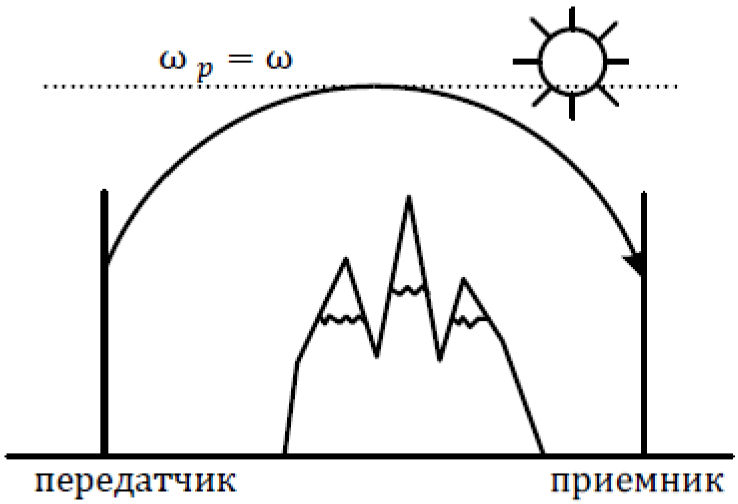
1) Если $\omega_p^2 < \omega^2 + \gamma^2$, тогда $\varepsilon'(\omega) > 0$, возможно распространение поперечных электромагнитных волн (и продольных тоже!)

2) Если $\omega_p^2 = \omega^2 + \gamma^2$, тогда $\varepsilon'(\omega) = 0$, возможно распространение только продольных электромагнитных волн.

3) Если $\omega_p^2 > \omega^2 + \gamma^2$, тогда $\varepsilon'(\omega) < 0$, поэтому $n = \sqrt{\mu\varepsilon'}$ - мнимый. Распространение электромагнитных волн невозможно (происходит отражение волн от плазмы).

Примеры от Соколова:

1) Концентрация ионизированных электронов увеличивается с высотой (ионосфера). Плазменная частота ω_p зависит от числа ионизованных атомов (вспомним $\omega_p^2 = \dfrac{4\pi N e^2}{m}$ - есть зависимость от концентрации N), так что она тоже растет с высотой. На некоторой высоте (на рисунке она отмечена пунктиром):



$\omega_p=\omega$, и излучение отражается.

Таким образом можно передавать сигналы через препятствия

3) Можно измерять расстояние до пульсаров.

Как устроен пульсар? Пусть в момент времени t он делает БДЫЩ, начиная испускать с этого момента мощный сигнал по всем частотам.

Но космос заполнен плазмой, и скорость света зависит от ε(ω). В результате БДЫЩ на разных частотах доходит до нас в разное время. Зная зависимость скорость волны v(ω) от частоты и Δt задержки между сигналами на разных частотах, можем определить расстояние до звезды:

$$s = v(\omega_1)t(\omega_1) = v(\omega_2)t(\omega_2)$$

$$v(\omega_1)t(\omega_1) = v(\omega_2)(t(\omega_1) + \Delta t) => t(\omega_1) = \frac{v(\omega_2)\Delta t}{v(\omega_1) + v(\omega_2)}$$

$$s = v(\omega_1)t(\omega_1) = v(\omega_1) * \frac{v(\omega_2)\Delta t}{v(\omega_1) + v(\omega_2)} = \frac{v(\omega_1)v(\omega_2)\Delta t}{v(\omega_1) + v(\omega_2)}$$

1.20. Физический смысл мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости

Утверждение: Если $\varepsilon'' \neq 0$, то среда поглощает энергию электромагнитного поля или переводит энергию возбуждения, запасённую в веществе в энергию электромагнитного поля.

Как же это доказать? Надо считать поток энергии через

$$\Phi_\varepsilon = \oint\limits_S (\vec{\sigma}, d\vec{S}) = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{\sigma} dV$$

Но чему же равна дивергенция вектора Умова-Пойтинга?

Оказывается,

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\right\} = -\operatorname{div} \sigma.$$

Почему так? Один из способов –

$$\operatorname{div}\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = \frac{c}{4\pi}\left\{\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}\right\}$$

а далее подставить уравнения Максвелла-Лоренца:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \cancelto{0}{\frac{4\pi}{c}\vec{j}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

Далее мы должны вспомнить, что вообще во всех уравнениях до этого E, D, B, H были действительными, а мы хотим их сделать комплексными!

$$\Phi_\varepsilon = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V dV\left\{\left(\operatorname{Re}\vec{E}, \frac{\partial \operatorname{Re}\vec{D}}{\partial t}\right) + \left(\operatorname{Re}\vec{H}, \frac{\partial \operatorname{Re}\vec{B}}{\partial t}\right)\right\}$$

Но действительную часть можно записать и иначе:

$$Re\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{A}^*)$$

. Тогда

$$div\vec{\sigma} = -\frac{1}{16\pi}\left\{(\vec{H}+\vec{H}^*)\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}+\vec{B}^*) + (\vec{E}+\vec{E}^*)\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}+\vec{D}^*)\right\}$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -i\omega\vec{D},\ \frac{\partial\vec{D}^*}{\partial t} = i\omega\vec{D}^*,\ \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -i\omega\vec{H},\ \frac{\partial\vec{H}^*}{\partial t} = i\omega\vec{H}^*.$$

Подставив получим:

$$\Phi_\varepsilon = \frac{i\omega}{16\pi}\int\limits_V dV\left\{(\vec{E}+\vec{E}^*, \vec{D}-\vec{D}^*) + (\vec{H}+\vec{H}^*, \vec{H}-\vec{H}^*)\right\}.$$

Учтём материальное уравнение $\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \vec{D}^* = \varepsilon^*\vec{E}^*$, тогда:

$$\Phi_\varepsilon = \frac{i\omega}{16\pi}\int\limits_V dV\left\{(\vec{E}+\vec{E}^*, \varepsilon\vec{E}-\varepsilon^*\vec{E}^*) + \vec{H}^2 - \vec{H}^{*2}\right\},$$

Раскроем скалярное произведение:

$$\Phi_\varepsilon = \frac{i\omega}{16\pi}\int\limits_V dV\left\{\varepsilon\vec{E}^2 - \varepsilon^*\vec{E}^{*2} + (\varepsilon-\varepsilon^*)(\vec{E},\vec{E}^*) + \vec{H}^2 - \vec{H}^{*2}\right\}$$

Выполним усреднение по периоду:

$$<\Phi_\varepsilon> = \frac{i\omega}{16\pi}(\varepsilon-\varepsilon^*)\int\limits_V dt(\vec{E}_0, \vec{E}_0^*)$$

Интеграл всегда больше нуля. Учтём, что $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, $\varepsilon^* = \varepsilon' - i\varepsilon''$. Тогда получим:

$$< \Phi_\varepsilon >= -\frac{\omega\varepsilon''}{8\pi} \int_V dt(\vec{E}_0, \vec{E}_0^*).$$

1) Если $\varepsilon'' > 0$, тогда $< \Phi_\varepsilon >< 0$ и среда диссипирующая.

2) Если $\varepsilon'' < 0$, тогда $< \Phi_\varepsilon >> 0$ и среда антидиссипирующая.

Диссипирующая среда – это та, которая энергию поглощает.
Например, обычная оконная занавеска является диссипирующей средой, т.к. поглощает свет (хотя часть, конечно, отражает, а не поглощает).

Антидиссипирующая среда – та, которая увеличивает амплитуду э/м волны.
Эм, а за счёт чего? Как правило, за счёт «внутренних резервов» - например, теплового движения.

1.21. Аналитические свойства комплексной диэлектрической проницаемости

Скажите вот мне, любая ли комплексная функция действительного аргумента может быть ε(ω)? Вот я сейчас напишу какую-нибудь произвольную функцию
ε(ω)=1+ω*i
Может ли существовать среда именно с такой ε(ω)?

Нет. ε(ω) определяется поляризацией среды

$$4\pi\vec{P}(\vec{r},t) = 4\pi \int_0^\infty d\tau f(\tau)\vec{E}(\vec{r},t-\tau)$$

А она, в свою очередь, действительной функцией f(τ) – функцией задержки.
Она похожа на импульсные и переходные характеристики на радио.
Суть заключается в том, что поляризация в момент времени определяется **E** не только в этот же момент времени, но и в предыдущие. И f(τ) - функция влияния **E** τ секунд назад на **P** прямо сейчас.
Например, $\lim_{\tau\to\infty} f(\tau) = 0$, т.к. чё было 100 млрд лет назад, оказывает уже совсем мизерное влияние на поляризацию **P** было прямо сейчас.

Выразим D:

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) + 4\pi \int_0^{\infty} d\tau f(\tau)\vec{E}(\vec{r},t-\tau) = \vec{E}(\vec{r},t) + 4\pi\vec{P}(\vec{r},t)$$

И пора бы уже возвращаться к ε(ω). Тут я сделаю лирическое отступление и решу задачу на эту тему (тем более что она есть в экзамене):

31.1. Связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$ в материальной среде, состоящей из твердых диполей, может быть записана в виде

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + \frac{4\pi\kappa}{\tau} \cdot \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \cdot \vec{E}(t') \cdot dt',$$

где κ и τ — константы. Найти $\epsilon(\omega)$ для такой среды.

Обычно

D=εE

Но в реальных средах такого нет и там обычно ε зависит от ω.

D(от волны частотой ω)= ε(ω)*E(от волны частотой ω)

Это кратко записывают как

D(ω)= ε(ω)*E(ω)

Если э/м волна будет не монохроматической, то D(t) будет собираться как суперпозиция по всем циклическим частотам:

$$D(t) = \int \varepsilon(\omega)E(\omega,t)d\omega$$

На этом основана задача 31.1. Нам даны D(t) и E(t). Нам нужно Фурье-преобразованием перейти к D(ω) и E(ω). А их отношение в силу D(ω)= ε(ω)*E(ω) и будет ε(ω), о которой нас спрашивают! Это идея решения. давайте её реализовывать.

Немного перезапишем наше выражение:

$$\vec{D}(t) - \vec{E}(t) = \frac{4\pi\kappa}{\tau} \cdot \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \cdot \vec{E}(t') \cdot dt'$$

(1):

Выразим D(t) и E(t) через D(ω) и E(ω):

$$\vec{D}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\vec{D}(\omega)$$

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\vec{E}(\omega)$$

Подставим в (1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\vec{D}(\omega)-\vec{E}(\omega)]\,e^{-i\omega t}d\omega = \frac{4\pi\varkappa}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\vec{E}(\omega)\,e^{-\frac{t}{\tau}}\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\left(\frac{1}{\tau}-i\omega\right)t'}$$

Упростим правую часть, вычислив один из интегралов:

$$\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\left(\frac{1}{\tau}-i\omega\right)t'} = \left.\frac{e^{\left(\frac{1}{\tau}-i\omega\right)t'}}{\frac{1}{\tau}-i\omega}\right|_{-\infty}^{t} = \frac{e^{\left(\frac{1}{\tau}-i\omega\right)t}}{\frac{1}{\tau}-i\omega} - \frac{\overset{0}{\cancel{e^{-\infty}}}\, e^{i\omega\infty}}{\frac{1}{\tau}-i\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\left(\vec{D}(\omega)-\vec{E}(\omega)\right) = \frac{4\pi\varkappa}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\vec{E}(\omega)\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\frac{e^{\frac{t}{\tau}}e^{-i\omega t}}{1/\tau\,(1-i\omega\tau)}$$

Перекинем всё в одну часть:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\vec{D}(\omega)-\vec{E}(\omega)-\frac{4\pi\varkappa\,\vec{E}(\omega)}{1-i\omega\tau}\right\}e^{-i\omega t}\,d\omega = 0$$

И приведём слагаемые при E(ω):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\vec{D}(\omega)-\vec{E}(\omega)\left(1+\frac{4\pi\varkappa\,\vec{E}(\omega)}{1-i\omega\tau}\right)\right\}e^{-i\omega t}\,d\omega = 0$$

Выражение в чёрных скобках и есть ε(ω), т.к. D(ω)- ε(ω)*E(ω)=0:

$$\vec{D}(\omega) = \vec{E}(\omega)\left(1+\frac{4\pi\varkappa}{1-i\omega\tau}\right) = \epsilon(\omega)\,\vec{E}(\omega)$$

Ответ:

$$\epsilon(\omega) = 1+\frac{4\pi\varkappa}{1-i\omega\tau}$$

Чтобы совсем навести красоту, выделим в комплексной диэлектрической проницаемости действительную и мнимую часть:

$$\underbrace{1+\frac{4\pi\varkappa}{1+\omega^2\tau^2}}_{\epsilon'(\omega)} + i\underbrace{\frac{4\pi\varkappa\,\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}}_{\epsilon''(\omega)}$$

Всё, задачу решили. Там f(τ) была вида

$$\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)$$

Соколов на лекциях проводит те же процедуры, но в общем случае, для любой f(τ):

$$\vec{D}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\vec{D}(\omega)e^{-i\omega t},\;\; \vec{E}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\vec{D}(\omega)e^{-i\omega t}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}+4\pi\int\limits_{0}^{\infty}d\tau f(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\vec{E}(\omega)e^{-i\omega(t-\tau)},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\vec{D}(\omega)e^{-i\omega t}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}+4\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}\int\limits_{0}^{\infty}d\tau f(\tau)e^{i\omega\tau}.$$

Выполним группировку слагаемых:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\left\{\vec{D}(\omega)-\left[1+4\pi\int\limits_{0}^{\infty}d\tau f(\tau)e^{o\omega\tau}\right]\vec{E}(\omega)\right\}e^{-i\omega t}=0.$$

В левой части выражения находится Фурье-образ. В силу единственности разложения в интеграл Фурье выражение в фигурной скобке обращается в ноль. Тогда:

$$\vec{D}(\omega)=\left\{1+4\pi\int\limits_{0}^{\infty}d\tau f(\tau)e^{i\omega\tau}\right\}\vec{E}(\omega).$$

Определение: Будем называть комплексной диэлектрической проницаемостью функцию $\varepsilon(\omega)$, устанавливающую пропорциональность между Фурье-образами $\vec{D}(\omega)$ и $\vec{E}(\omega)$.

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega), \text{ где } \varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{i\omega\tau}.$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{i\omega\tau}$$

Вот она, родимая, формула!

На этом моменте Соколов посылает физику и ближайшие несколько страниц занимается исключительно математикой.

Во-первых, получим отдельно выражения для действительной и мнимой части ε(ω):

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^\infty d\tau f(\tau) \cos\omega\tau, \quad \varepsilon''(\omega) = 4\pi \int_0^\infty d\tau f(\tau) \sin\omega\tau$$

Во-вторых, ранее ε(ω) было комплексной функцией, но действительной переменной. Соколов предлагает совсем пойти в разнос и рассмотреть ε(z) – комплексную функцию комплексной переменной. С точки зрения физики полный бред (как частота может быть комплексной), но Соколов на самом деле осуществляет подготовку к выводу формул Крамерса-Кронига, а они реально полезны.

2) Исследуем аналитические свойства ε в комплексной плоскости: $\omega \to z = x + iy$.

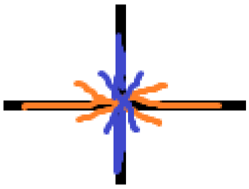
$$\varepsilon(\omega) \to \varepsilon(z) = 1 + 4\pi \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{i(x+iy)\tau} = 1 + 4\pi \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{ix\tau} e^{-y\tau}.$$

Следствия:

а) Так как $f(\tau)$ - ограничена, то и интеграл сходится в верхней полуплоскости при $y > 0$.

б) Для диэлектриков $f(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$ и интеграл сходится на вещественной оси при $y = 0$. Поэтому $\varepsilon(z)$ не имеет особенностей в верхней комплексной полуплоскости.

Ещё одно свойство – стремление к 0 при стремлении аргумента к 0 ***по осям:*** то есть так



а) Если $|z| \to 0,\ x = fixed,\ y \to \infty$, тогда:

$$\int\limits_0^\infty d\tau f(\tau) e^{ix\tau} e^{-y\tau} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0.$$

В этом выражении $f(\tau)e^{ix\tau}$ - ограниченная функция.
б)Если $|z| \to 0,\ y = fixed,\ x \to \infty$, тогда:

$$\int\limits_0^\infty d\tau f(\tau) e^{-y\tau} e^{ix\tau} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

В этом выражении $f(\tau)e^{-y\tau}$ - ограниченная функция, а $e^{ix\tau}$ - быстро осциллирующая функция (положительные и отрицательные полупериоды обращают друг друга в ноль).

1.22. Формулы Крамерса-Кронига

Наша цель – вывести формулы К-К. Тут будет ТФКП, но не бойтесь, ничего сложного нет (говорю как человек, который ТФКП ой как не любит).

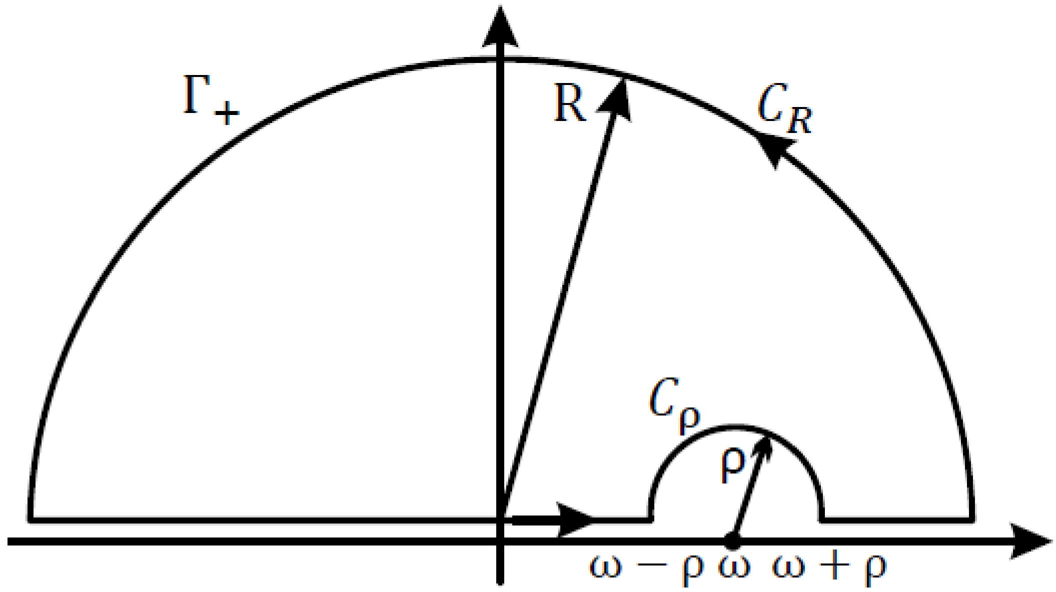
$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega} dx.$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x-\omega} dx.$$

Для этого вычислим интеграл

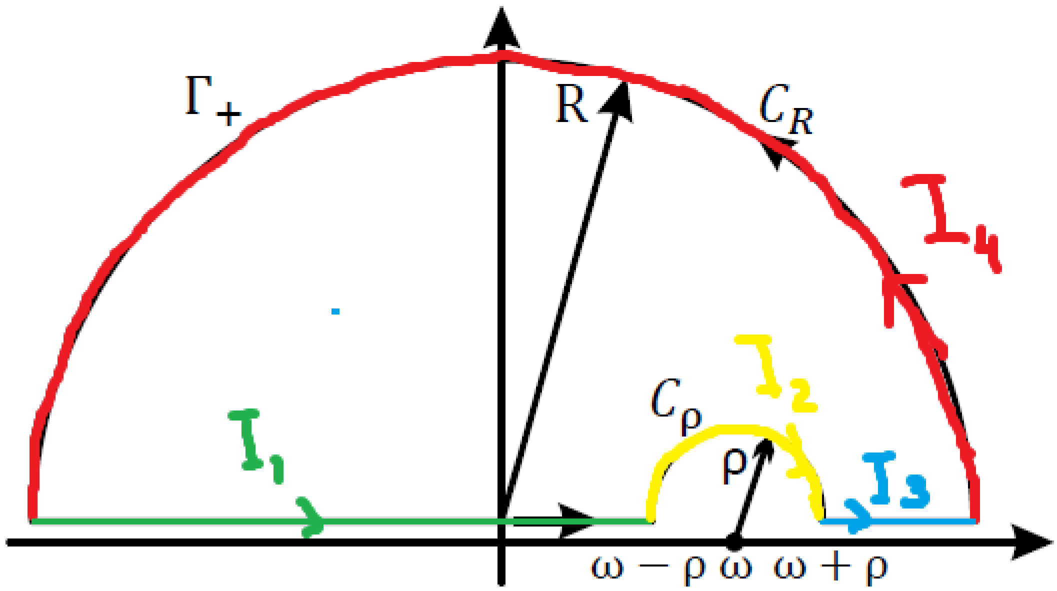
$$I(\omega) = \oint_{\Gamma_+} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z-\omega} dz$$

Вот по такому контуру:

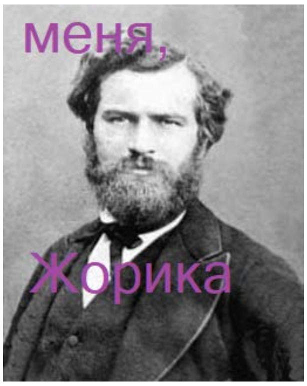


Интеграл I будет равен 0, т.к. внутри контура нет особых точек.

Разобьём интеграл на 4:



Красный интеграл, если устремить R к +бесконечности, будет 0 (кажется, в силу леммы Жордана)



Вычисляем I_2:

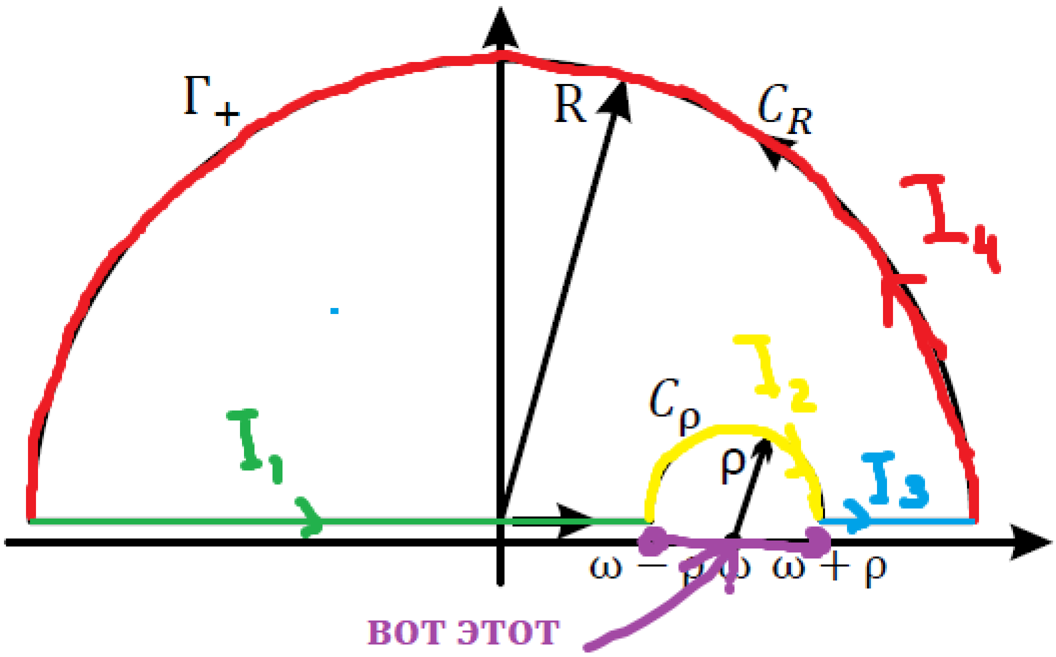
$$I_2 = \int\limits_{c_\rho} \frac{\varepsilon(z)-1}{z-\omega}dz = \left\{ \begin{matrix} z = \omega + \rho e^{i\varphi}, \;\; \rho = fixed, \\ dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi, \;\; \varphi \in [\pi, 0] \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\pi}^{0} \frac{\varepsilon(\omega+\rho e^{i\varphi})-1}{\rho e^{i\varphi}} i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i\int\limits_{\pi}^{0} [\varepsilon(\omega)-1]d\varphi = -i\pi[\varepsilon(\omega)-1].$$

А сумма I_1 и I_3, если вы заметите, и будет

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x)-1}{x-\omega}dx = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x)-1}{x-\omega}dx$$

потому что интеграл берётся по действительной оси, из которой мы вырезали кусочек



но мы устремляем ρ к 0, так что на вырезанный кусочек можем забить.
Получаем $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

$$\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx - i\pi[\varepsilon(\omega) - 1] = 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{i}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx$$

Получили интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Последний шаг: записать ε как $\varepsilon' + i\varepsilon''$ в обеих частях: и в левой, и в интеграле:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) = 1 - \frac{i}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon'(x) - 1] + i\varepsilon''(x)}{x - \omega} dx =$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega} dx - \frac{i}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx$$

Таким образом мы получили формулы Крамерса-Кронига:

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega} dx.$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx.$$

1.23. Распространение электромагнитных волн в проводящей диспергирующей среде. Связь векторов поля, частоты и волнового вектора

В предыдущих вопросах мы старательно избегали такой физической величины, как k – волновое число.
Соколов берёт уравнения Максвелла-Лоренца

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \equiv 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{cases}$$

полагает, что ρ=0 и ищет решение в виде

$$\{\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}\} \sim e^{-i\left(\omega t - (\vec{k},\vec{r})\right)}$$

Цель – получить связь между k и ε. И Денисов её находит:

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2}$$

А вы же не забыли, что ε(ω) комплексная? Тогда и k тоже комплексное.

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu(\varepsilon' + i\varepsilon'')$$

Про то, что показатель преломления комплексный, тоже знаете?

$$n^2 = \varepsilon\mu$$

В нём также можно выделить действительную и мнимую часть:

$$n'^2 = \frac{\mu(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon')}{2} \quad - \quad \text{показатель преломления.}$$

$$n''^2 = \frac{\mu(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon')}{2} \quad - \quad \text{коэффициент поглощения.}$$

Что ещё можно сказать? Что **k**, **H, E** образуют правую ортогональную тройку:

$$\vec{H} = \frac{c}{\omega\mu}[\vec{k}, \vec{E}]$$

Достаточно странный вопрос – Соколов и Денисов выводят беспорядочный набор формул, не имея какой-то явной цели. Чем больше напишите, тем лучше.